International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Programa del Diploma

Cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Análisis y Enfoques NS

Para ser utilizado durante la enseñanza de la asignatura y en los exámenes
Primeros exámenes: 2021

Versión 1.0

NIVEL SUPERIOR

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Índice

Tema 1: Aritmética y álgebra – NS 2

Tema 2: Funciones – NS 3

Tema 3: Geometría y trigonometría – NS 4

Tema 4: Estadística y probabilidad – NS 7

Tema 5: Análisis – NS 9

Tema 1: Aritmética y álgebra – NS

1.2	El n-ésimo término de una progresión aritmética	$u_n = u_1 + (n-1)d$
	La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética	$S_n = \frac{n}{2}\left(2u_1 + (n-1)d\right)$; $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$
1.3	El n-ésimo término de una progresión geométrica	$u_n = u_1 r^{n-1}$
	La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica	$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r}$, $r \neq 1$
1.8	Suma de los infinitos términos de una progresión geométrica	$S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$, $\lvert r \rvert < 1$
1.4	Interés compuesto	$FV = PV \times \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kn}$, donde FV es el valor futuro, PV es el valor presente (actual), n es el número de años, k es el número de períodos de composición del interés que hay en un año, r% es el tipo de interés nominal anual
1.5	Potencias y logaritmos	$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, donde $a > 0, b > 0, a \neq 1$
1.7	Potencias y logaritmos	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^m = m \log_a x$ $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
	Funciones exponenciales y logarítmicas	$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$; $\log_a a^x = x = a^{\log_a x}$ donde $a, x > 0, a \neq 1$
1.9	Teorema del binomio $n \in \mathbb{N}$	$(a+b)^n = a^n + {}^n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + \ldots + {}^n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \ldots + b^n$ ${}^n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

1.10	Combinaciones	$^{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
	Permutaciones	$^{n}\mathrm{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
	Ampliación del teorema del binomio $n \in \mathbb{Q}$	$(a+b)^{n} = a^{n}\left(1 + n\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{b}{a}\right)^{2} + \ldots\right)$
1.12	Números complejos	$z = a + b\mathrm{i}$
1.13	Forma módulo-argumental (polar) y forma exponencial (de Euler)	$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r\,\mathrm{cis}\,\theta$
1.14	Teorema de De Moivre	$\left[r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\right]^{n} = r^{n}(\cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta) = r^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^{n}\,\mathrm{cis}\,n\theta$

Tema 2: Funciones – NS

2.1	Ecuaciones de la recta	$y = mx + c$; $ax + by + d = 0$; $y - y_1 = m(x - x_1)$
	Fórmula de la pendiente	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
2.6	Eje de simetría del gráfico de una función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ el eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$
2.7	Soluciones de una ecuación cuadrática	$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $a \neq 0$
	Discriminante	$\Delta = b^2 - 4ac$
2.12	Suma y producto de las raíces de una ecuación polinómica que es de la forma $\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0$	La suma es $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$; el producto es $\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$

Tema 3: Geometría y trigonometría – NS

Conocimientos previos – NS	
Área de un paralelogramo	$A = bh$, donde b es la base y h es la altura
Área de un triángulo	$A = \frac{1}{2}(bh)$, donde b es la base y h es la altura
Área de un trapecio	$A = \frac{1}{2}(a+b)h$, donde a y b son los lados paralelos y h es la altura
Área de un círculo	$A = \pi r^2$, donde r es el radio
Longitud de la circunferencia	$C = 2\pi r$, donde r es el radio
Volumen de un ortoedro	$V = lwh$, donde l es la longitud, w es el ancho y h es la altura
Volumen de un cilindro	$V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura
Volumen de un prisma	$V = Ah$, donde A es el área de la sección transversal y h es la altura
Área de la superficie lateral de un cilindro	$A = 2\pi rh$, donde r es el radio y h es la altura
Distancia que hay entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
Coordenadas del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos son (x_1, y_1) y (x_2, y_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

3.1	Distancia que hay entre dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)	$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
	Coordenadas del punto medio de un segmento de recta cuyos extremos son (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2)	$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

	Volumen de una pirámide recta	$V = \frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base y h es la altura
	Volumen de un cono recto	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura
	Área de la superficie lateral de un cono	$A = \pi rl$, donde r es el radio y l es la generatriz
	Volumen de una esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio
	Área de la superficie de una esfera	$A = 4\pi r^2$, donde r es el radio
3.2	Teorema del seno	$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$
	Teorema del coseno	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
	Área de un triángulo	$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$
3.4	Longitud de un arco	$l = r\theta$, donde r es el radio, θ es el ángulo en radianes
	Área de un sector circular	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$, donde r es el radio, θ es el ángulo en radianes
3.5	Relación fundamental para $\tan\theta$	$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$
3.6	Relación fundamental (identidad pitagórica)	$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$
	Fórmulas del ángulo doble	$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
		$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

3.9	Relaciones trigonométricas recíprocas	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$
	Relaciones trigonométricas fundamentales	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$
3.10	Fórmulas de la suma y diferencia de dos ángulos	$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen} B$ $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$ $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$
	Fórmula del ángulo doble para la tan	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$
3.12	Módulo de un vector	$\lvert \boldsymbol{v} \rvert = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$, donde $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
3.13	Producto escalar	$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$, donde $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \lvert \boldsymbol{v} \rvert \lvert \boldsymbol{w} \rvert \cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$
	Ángulo que forman dos vectores	$\cos\theta = \frac{v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3}{\lvert \boldsymbol{v} \rvert \lvert \boldsymbol{w} \rvert}$
3.14	Ecuación vectorial de una recta	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$
	Forma paramétrica de la ecuación de la recta	$x = x_0 + \lambda l,\ y = y_0 + \lambda m,\ z = z_0 + \lambda n$
	Forma cartesiana de la ecuación de una recta	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$

3.16	Producto vectorial	$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} v_2w_3-v_3w_2 \\ v_3w_1-v_1w_3 \\ v_1w_2-v_2w_1 \end{pmatrix}$, donde $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ $\left\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\right\|=\left\|\boldsymbol{v}\right\|\left\|\boldsymbol{w}\right\|\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$
	Área de un paralelogramo	$A=\left\|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\right\|$ donde $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ constituyen dos lados adyacentes del paralelogramo
3.17	Ecuación vectorial de un plano	$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$
	Ecuación de un plano (utilizando el vector normal)	$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$
	Ecuación cartesiana de un plano	$ax+by+cz=d$

Tema 4: Estadística y probabilidad – NS

4.2	Rango intercuartil	$\mathrm{RIC}=Q_3-Q_1$
4.3	Media ($\overline{x}$) de un conjunto de datos	$\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k}f_ix_i}{n}$, donde $n=\sum_{i=1}^{k}f_i$
4.5	Probabilidad de un suceso A	$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}$
	Sucesos complementarios	$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A')=1$
4.6	Sucesos compuestos	$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$
	Sucesos incompatibles (mutuamente excluyentes)	$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$
	Probabilidad condicionada	$\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$
	Sucesos independientes	$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$
4.7	Valor esperado de una variable aleatoria discreta X	$\mathrm{E}(X)=\sum_{i=1}^{k}x_i\mathrm{P}(X=x_i)$

4.8	Distribución binomial $X \sim \mathrm{B}(n, p)$	
	Media	$\mathrm{E}(X) = np$
	Varianza	$\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$
4.12	Variable normal tipificada o estandarizada	$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
4.13	Teorema de Bayes	$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(A \mid B) + \mathrm{P}(B')\ \mathrm{P}(A \mid B')}$ $\mathrm{P}(B_i \mid A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A \mid B_1) + \mathrm{P}(B_2)\mathrm{P}(A \mid B_2) + \mathrm{P}(B_3)\mathrm{P}(A \mid B_3)}$
4.14	Varianza σ^2	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^{\,2}}{n} - \mu^2$
	Desviación típica σ	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \mu)^2}{n}}$
	Transformación lineal de una variable aleatoria unidimensional	$\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\ \mathrm{Var}(X)$
	Valor esperado de una variable aleatoria continua X	$\mathrm{E}(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x$
	Varianza	$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \mathrm{E}(X^2) - \left[\mathrm{E}(X)\right]^2$
	Varianza de una variable aleatoria discreta X	$\mathrm{Var}(X) = \sum (x-\mu)^2\ \mathrm{P}(X = x) = \sum x^2\ \mathrm{P}(X = x) - \mu^2$
	Varianza de una variable aleatoria continua X	$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, \mathrm{d}x - \mu^2$

Tema 5: Análisis – NS

5.12	Derivada de $f(x)$ partiendo de la propia definición de derivada	$y = f(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$
5.3	Derivada de x^n	$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
5.6	Derivada de $\operatorname{sen} x$	$f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
	Derivada de $\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
	Derivada de e^x	$f(x) = \mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x) = \mathrm{e}^x$
	Derivada de $\ln x$	$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
	Regla de la cadena	$y = g(u)$, donde $u = f(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
	Regla del producto	$y = uv \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
	Regla del cociente	$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$
5.15	Derivadas inmediatas	
	$\tan x$	$f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
	$\sec x$	$f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
	$\operatorname{cosec} x$	$f(x) = \operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$
	$\cot x$	$f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
	a^x	$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x (\ln a)$
	$\log_a x$	$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
	$\operatorname{arcsen} x$	$f(x) = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\arccos x$	$f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

	$\arctan x$	$f(x)=\arctan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
5.9	Aceleración	$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}$
	Distancia recorrida entre t_1 y t_2	distancia $=\int_{t_1}^{t_2}\lvert v(t)\rvert \mathrm{d}t$
	Desplazamiento entre t_1 y t_2	desplazamiento $=\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$
5.5	Integral de x^n	$\int x^n \mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$
	Área entre una curva $y=f(x)$ y el eje x, donde $f(x)>0$	$A=\int_a^b y\,\mathrm{d}x$
5.10	Integrales inmediatas	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$
		$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$
		$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\operatorname{sen} x+C$
		$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$
5.15	Integrales inmediatas	$\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$
		$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$
		$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ \ \lvert x\rvert<a$
5.16	Integración por partes	$\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=uv-\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$ o $\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$
5.11	Área de la región que está delimitada por una curva y por el eje x	$A=\int_a^b\lvert y\rvert \mathrm{d}x$

5.17	Área de la región que está delimitada por una curva y por el eje y	$A = \int_a^b \lvert x \rvert \mathrm{d}y$
	Volumen de revolución alrededor del eje x o del eje y	$V = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x$ o $V = \int_a^b \pi x^2 \mathrm{d}y$
5.18	Método de Euler	$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n, y_n)$; $x_{n+1} = x_n + h$, donde h es una constante (denominada 'paso')
	Factor integrante para $y' + P(x)y = Q(x)$	$\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$
5.19	Serie de Maclaurin	$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$
	Serie de Maclaurin de funciones especiales	$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$
		$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$
		$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$
		$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
		$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$