# 13 Conocimientos previos

**OBJETIVOS DEL CAPÍTULO:**

Este capítulo contiene explicaciones breves, ejemplos y ejercicios de práctica sobre temas que se deberían saber antes de comenzar el curso. No es necesario trabajar en el capítulo completo todo a la vez. Se puede recurrir al mismo cada vez que sea necesario.

Por ejemplo, antes de comenzar el capítulo 2 sobre estadística descriptiva, trabaje en la sección 4, "Estadísticas", de este capítulo.

## Contenidos del capítulo

# 1 Número

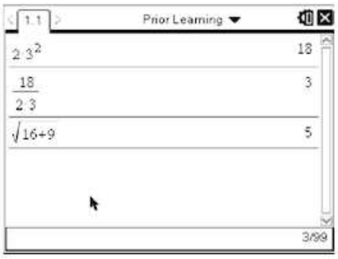
## 1.1 Operaciones

Las siguientes son las reglas relativas al orden en que se deben realizar las operaciones:

- Primero se calculan los paréntesis (o corchetes).
- A continuación, se calculan los exponentes (potencias, raíces).
- Después se calculan las multiplicaciones y las divisiones, de izquierda a derecha.
- Por último, se calculan las sumas (adiciones) y las restas (sustracciones), de izquierda a derecha.

Se puede usar la siguiente regla nemotécnica: **PEMDAS**
**P**aréntesis
**E**xponentes
**MD** multiplicación y división (de izquierda a derecha)
**AS** adición y sustracción (de izquierda a derecha)

La calculadora de pantalla gráfica (en adelante, CPG) sigue estas reglas, así que si se ingresa una operación correctamente, se debería obtener la respuesta correcta.




Las calculadoras simples, como las que hay en los teléfonos, no siempre siguen las reglas de las operaciones.

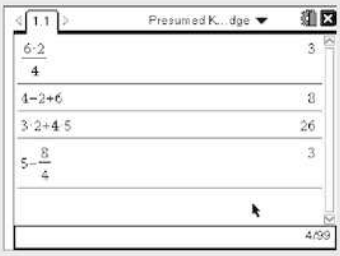
La CPG muestra las divisiones como fracciones y esto aclara el orden de las operaciones.

### Ejemplo 1

| | |
|---|---|
| **a** Evalúe $\dfrac{11+(-1)^2}{4-(3-5)}$ | |
| $= \dfrac{11+1}{4-(-2)}$ | *Primero los paréntesis* |
| $= \dfrac{12}{6}$ <br> $= 2$ | *Simplificar el numerador y el denominador* |
| **b** Evalúe $\dfrac{-3+\sqrt{9-8}}{4}$ | |
| $= \dfrac{-3+\sqrt{1}}{4}$ | *Simplificar los términos que están dentro de la raíz cuadrada* |
| $= \dfrac{-3+1}{4}$ | *Evaluar la raíz* |
| $= \dfrac{-2}{4}$ <br> $= -\dfrac{1}{2}$ | *Simplificar el numerador y el denominador* |

▶ Continúa en la página siguiente.

En la CPG, para las fracciones y las raíces se pueden usar tanto plantillas como paréntesis.




## *Ejercitación 1A*

Realice primero los cálculos a mano, luego verifique sus respuestas con la CPG.

**1** Calcule:

**a** $12 - 5 + 4$ **b** $6 \div 3 \times 5$ **c** $4 + 2 \times 3 - 2$

**d** $8 - 6 \div 3 \times 2$ **e** $4 + (3 - 2)$ **f** $(7 + 2) \div 3$

**g** $(1 + 4) \times (8 - 4)$ **h** $1 - 3 + 5 \times (2 - 1)$

**2** Halle:

**a** $\dfrac{6+9}{4-1}$ **b** $\dfrac{2 \times 9}{3 \times 4}$ **c** $\dfrac{2-(3+4)}{4 \times (2-3)}$ **d** $\dfrac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 - 1}$

**3** Determine:

**a** $3 \times (-2)^2$ **b** $2^2 \times 3^3 \times 5$ **c** $4 \times (5 - 3)^2$ **d** $(-3)^2 - 2^2$

**4** Calcule:

**a** $\sqrt{3^2 + 4^2}$ **b** $\left(\sqrt{4}\right)^3$ **c** $\sqrt{4^3}$ **d** $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2}}$

**5** Halle:

**a** $\sqrt{\dfrac{13^2 - \left(3^2 + 4^2\right)}{2 \times 18}}$ **b** $2\sqrt{\dfrac{3 + 5^2}{7}}$ **c** $2(3^2 - 4(-2)) - (2 - \sqrt{7 - 3})$

## 1.2 Números primos, divisores y múltiplos

Un número **primo** es un entero, mayor que 1, que solo es múltiplo de 1 y de sí mismo.

"Divisor" y "factor" significan lo mismo.

En 2009, el mayor número primo conocido tenía 12 978 189 dígitos. Los números primos se han convertido en un importante tema de estudio, ya que son utilizados en criptografía.

### Ejemplo 2

Enumere todos los divisores de 42.

| | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>$42 = 1 \times 42$; $42 = 2 \times 21$<br>$42 = 3 \times 14$; $42 = 6 \times 7$<br>Los divisores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42. | *Escribir 42 como producto de 2 números, de todas las formas posibles* |

## Ejemplo 3

| Escriba el número 24 como producto de divisores primos. | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>$24 \div 2$ $\quad 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$<br>$12 \div 2$ $\quad = 2^3 \times 3$<br>$6 \div 2$<br>$3 \div 3$<br>1 | *Comenzar dividiendo por el número primo más pequeño. Repetir hasta que el resultado de la división sea 1.* |

## Ejemplo 4

| Halle el **mínimo común múltiplo** (mcm) de 12 y 15. | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>Los múltiplos de 12 son<br>12, 24, 36, 48, **60**, 72, 84, 96, 108, **120**, 132, 144, ...<br>Los múltiplos de 15 son<br>15, 30, 45, **60**, 75, 90, 105, **120**, 135, ...<br>Los múltiplos comunes son 60, 120, ...<br>El mcm es 60. | *Enumerar los múltiplos de cada número hasta encontrar algunos que estén en ambas listas. El mcm es el menor de los números que están en ambas listas.* |

## Ejemplo 5

| Halle el **máximo común divisor** (mcd) de 36 y 54. | | | |
|---|---|---|---|
| **Respuesta** | | | |
| $36 \div 2$ | $36 = \mathbf{2} \times 2 \times \mathbf{3} \times \mathbf{3}$ | $54 \div 2$ | $54 = \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} \times 3$ |
| $18 \div 2$ | | $27 \div 3$ | |
| $9 \div 3$ | | $9 \div 3$ | |
| $3 \div 3$ | | $3 \div 3$ | |
| 1 | | 1 | |
| El mcd de 36 y 54 es $2 \times 3 \times 3 = 18$. | | | |

Escriba cada número como producto de divisores primos. Halle el producto de todos los divisores que son comunes a ambos números.

## *Ejercitación 1B*

**1** Enumere todos los divisores de:
**a** 18 **b** 27 **c** 30 **d** 28 **e** 78

**2** Escriba como producto de divisores primos:
**a** 36 **b** 60 **c** 54 **d** 32 **e** 112

**3** Halle el mcm de:
**a** 8 y 20 **b** 6, 10 y 16

**4** Halle el mcd de:
**a** 56 y 48 **b** 36, 54 y 90

# 1.3 Fracciones y decimales

Hay dos tipos de fracciones:

- Fracciones **comunes** (llamadas simplemente "fracciones"), como $\frac{4}{5}$ $\frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$
- Fracciones **decimales** (llamadas simplemente "decimales"), como 0,125

Las fracciones pueden ser:

- **Propias**, como $\frac{2}{3}$, en las que el numerador es menor que el denominador
- **Impropias**, como $\frac{4}{3}$, en las que el numerador es mayor que el denominador
- **Mixtas**, como $6\frac{7}{8}$

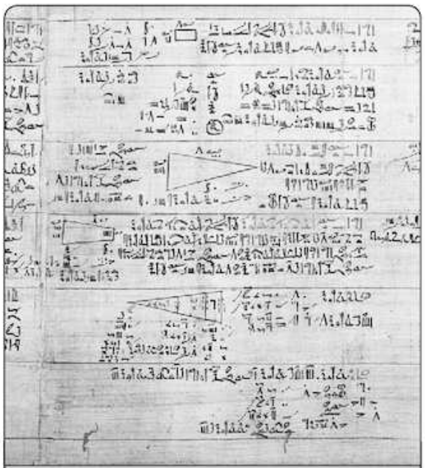
Las fracciones en las que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes están reducidas a su **mínima expresión**.

$\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{12}$ son fracciones **equivalentes**.

0,675 es un decimal **finito**.

0,32... o $0,\overline{32}$ o $0,\dot{3}\dot{2}$ son distintas formas de escribir el decimal **periódico** 0,3232323232...
Los decimales que no son finitos y que tampoco son periódicos son números **irracionales**, como $\pi$ o $\sqrt{2}$.

En una CPG podemos ingresar una fracción usando la plantilla $\frac{\square}{\square}$ o usando la tecla de división $\div$. En algunos casos habrá que tener cuidado, ya que será necesario utilizar paréntesis.



El papiro de Rhind del antiguo Egipto, alrededor del 1600 a. C., muestra operaciones con fracciones. Los egipcios usaban las fracciones **unitarias** en sus cálculos. Así que, por ejemplo, en lugar de $\frac{4}{5}$, escribían $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$. Esta no es considerada, en general, una forma útil de escribir fracciones.

$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 5...
$\sqrt{2} \approx$ 1,41421356237309504880168872420969807856967187537...
Estos números no son decimales finitos y no tienen patrones que se repitan (períodos) en sus dígitos.

## Ejemplo 6

**a** Evalúe:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\times\frac{4}{9}$$

*× antes que +*

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$=\frac{4}{6}$$

*Simplificar*

$$=\frac{2}{3}$$

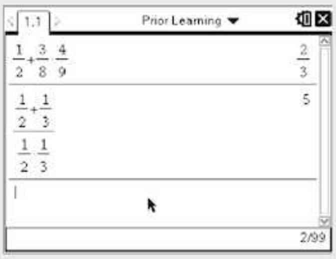
**b** Evalúe:

*Calcular primero el numerador y el denominador*

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}$$

$$=5$$




## Ejemplo 7

**a** Convierta a decimal la fracción $\frac{7}{16}$.

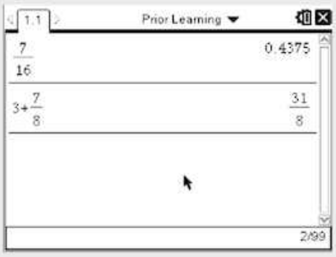
**b** Escriba $3\frac{7}{8}$ como fracción impropia.

**Respuestas**

**a** $\frac{7}{16}=0{,}4375$

**b** $3\frac{7}{8}=\frac{24}{8}+\frac{7}{8}$

$$=\frac{31}{8}$$




## *Ejercitación 1C*

**1** Calcule:

**a** $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$ **b** $\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}\times1\frac{1}{3}$

**c** $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}$ **d** $\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}}$

**2** Escriba las siguientes fracciones reducidas a su mínima expresión:

**a** $\frac{16}{36}$ **b** $\frac{35}{100}$ **c** $\frac{34}{51}$ **d** $\frac{125}{200}$

**3** Escriba estas fracciones mixtas como fracciones impropias:

**a** $3\frac{3}{5}$ **b** $3\frac{1}{7}$ **c** $23\frac{1}{4}$ **d** $2\frac{23}{72}$

**4** Escriba estas fracciones impropias como fracciones mixtas:

**a** $\frac{32}{7}$ **b** $\frac{100}{3}$ **c** $\frac{17}{4}$ **d** $\frac{162}{11}$

**5** Convierta a decimales:

**a** $\frac{8}{25}$ **b** $\frac{5}{7}$ **c** $3\frac{4}{5}$ **d** $\frac{45}{17}$

La CPG tiene herramientas útiles para operar con fracciones. Véase menu **2: Number** (número).

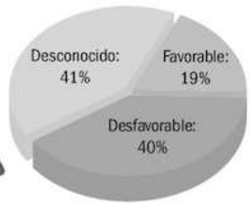
Para convertir una fracción en número decimal, dividimos el numerador por el denominador. Si presionamos ctrl ≈, veremos el resultado como decimal en lugar de como fracción.

## 1.4 Porcentajes

Un porcentaje es una forma de expresar una fracción o una razón como una parte de 100. Por ejemplo, 25% significa 25 partes de 100.

Como fracción, $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Como decimal, 25% = 0,25.


### Ejemplo 8

| La nota de Lara en su prueba de Matemáticas fue 25 sobre 40. ¿Cuál fue su nota, expresada como porcentaje? | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>$\frac{25}{40} \times 100 = 62{,}5\%$ | *Escribir la nota como fracción*<br>*Multiplicar por 100*<br>*Usar la CPG* |

### Ejemplo 9

| Hay 80 alumnos que cursan los programas del IB en un colegio. El 15% cursa Estudios Matemáticos. ¿Cuántos son estos alumnos? | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>**Método 1**<br>$\frac{15}{100} \times 80 = 12$ | *Escribir el porcentaje como fracción con denominador 100 y luego multiplicar por 80* |
| **Método 2**<br>15% = 0,15<br>0,15 × 80 = 12 | *Escribir el porcentaje como decimal*<br>*Multiplicar por 80* |


**Divisas internacionales**
Las preguntas en los exámenes de Estudios Matemáticos podrían usar divisas internacionales.
Por ejemplo: franco suizo (CHF), dólar estadounidense (USD), libra esterlina (GBP), euro (EUR), yen japonés (JPY) y dólar australiano (AUD).

## *Ejercitación 1D*

**1** Escriba como porcentajes:

**a** 13 alumnos de una clase de 25

**b** 14 puntos sobre un total de 20

**2** Halle el valor de:

**a** 7% de CHF32 **b** $4\frac{1}{2}$% de GBP12,00

**c** 25% de EUR750,28 **d** 130% de JPY8000

7% = 0,07

## Aumentos y disminuciones porcentuales

Consideremos un aumento de 35%.
El nuevo valor después del aumento será 135% del valor original.
Así que, para aumentar un monto un 35%, hay que hallar 135% de ese monto. Multiplicar por $\frac{135}{100}$ o 1,35.

Ahora consideremos una disminución de 15%.
Después de una disminución de 15%, el nuevo valor será 85% del valor original. Así que, para disminuir un monto un 15%, hay que hallar 85% de ese monto. Multiplicar por $\frac{85}{100}$ o por 0,85.

## Ejemplo 10

**a** El gerente de un negocio aumenta 12% los precios de los CD. Un CD costaba originalmente CHF11,60. ¿Cuánto costará después del aumento?

**b** El costo de un boleto de avión disminuye 8%. El precio original era GBP880. ¿Cuál es el nuevo precio?

**c** El alquiler de un apartamento ha aumentado de EUR2700 a EUR3645 por mes. ¿Qué porcentaje ha aumentado?

Después de un aumento de 12%, el monto será 112% del valor original.

Después de una disminución de 8%, el monto será 92% del valor original.

**Respuestas**

**a** $11{,}60 \times 1{,}12 = 12{,}99$ francos
(al centésimo de CHF más cercano)

**b** $880 \times 0{,}92 = 809{,}60$ libras

**c** **Método 1**

El aumento es $3645 - 2700$
$= 945$ euros. *Hallar el aumento*

El porcentaje de aumento es
$\frac{945}{2700} \times 100 = 35\%$. *Calcular el aumento como porcentaje del monto original*

**Método 2**

$\frac{3645}{2700} = 1{,}35 = 135\%$ *Calcular el precio nuevo como porcentaje del precio viejo*
El porcentaje de aumento es 35%.

Porcentaje de aumento
$= \frac{\text{aumento real}}{\text{valor original}} \times 100\%$

## Ejemplo 11

| | |
|---|---|
| En un negocio, el precio de un producto se muestra como AUD44, **incluido** el impuesto.<br>La tasa de impuesto es 10%.<br>¿Cuál era el precio sin el impuesto? | |
| **Respuesta**<br>Llamemos al precio original $x$. | |
| Después de haber agregado el impuesto, el precio será $1{,}10x$. | *110% = 1,10* |
| Por lo tanto: $1{,}10x = 44$ | *Hallar x* |
| $x = 44 \div 1{,}10$ | *Dividir ambos miembros por 1,10* |
| $= 40$ | |
| El precio sin impuesto es AUD40. | |

## *Ejercitación 1E*

**1** En el Reino Unido, los precios de algunos bienes incluyen un impuesto del gobierno llamado VAT (IVA), que es del 20%. Un televisor cuesta GBP480 antes de aplicarle el VAT. ¿Cuánto costará después de aplicar el VAT?

**2** En una liquidación en un negocio de Tokio, a un vestido que valía JPY17 000 se lo redujo un 12,5%. ¿Cuál es el precio de liquidación?

**3** El costo de un boleto de tren semanal aumenta de GBP120 a GBP128,40. ¿Cuál es el porcentaje de aumento?

**4** Entre 2004 y 2005, la producción de petróleo en Australia cayó de 731 000 a 537 500 barriles por día. ¿En qué porcentaje disminuyó la producción?

**5** Entre 2005 y 2009, la población de Venezuela aumentó un 7%. La población era 28 400 000 en 2009. ¿Cuál era la población en 2005 (redondeada al 100 000 más cercano)?

**6** Un producto aparece en una oferta marcado con un 15% de descuento y con una etiqueta de precio de USD27,20. ¿Cuál era el precio original antes del descuento?

**7** El impuesto a bienes y servicios que se cobra en los productos vendidos en negocios se incrementó de 17% a 20%. ¿Cuánto aumentaría el precio de un producto que cuesta GBP20 antes de aplicar el impuesto?

**8** Por error, un camarero agrega una tasa de servicio de 10% al costo de una comida que fue de AUD50. Luego reduce el precio 10%. ¿Es ahora el precio igual al precio original? Si no lo fuera, ¿cuál es el cambio porcentual respecto del precio original?

## 1.5 Razón y proporción

La **razón** entre dos números *r* y *s* es *r*:*s*, y es equivalente a la fracción $\frac{r}{s}$. Como ocurre con una fracción, una razón puede reducirse a su mínima expresión. Por ejemplo: 6:12 es equivalente a 1:2 (dividiendo ambos números de la razón por 6).

> Cuando se escribe una razón reducida a su mínima expresión, ambos números de la razón deben ser enteros positivos.

En una **razón unitaria**, uno de los dos números es 1.

Por ejemplo 1:4,5 o 25:1.

> Cuando se escribe una razón unitaria, se pueden usar decimales.

Si dos cantidades *a* y *b* son **proporcionales**, entonces la razón *a*:*b* es constante.

También se escribe $a \propto b$ (*a* es proporcional a *b*).

### Ejemplo 12

Se vendieron 200 entradas para el baile del colegio. Los niños compraron 75 y las niñas compraron el resto. Escriba la razón de niños a niñas en el baile. Dé la respuesta reducida a su mínima expresión.

**Respuesta**
El número de niñas es 200 − 75 = 125.
La razón de niños a niñas es 75:125 = 3:5.

> Hay que dar siempre la razón reducida a su expresión mínima.

Las escalas de los mapas se escriben generalmente como una razón. Una escala de 1:50 000 significa que 1 cm en el mapa representa 50 000 cm (0,5 km) en la tierra.

### Ejemplo 13

Un viejo mapa inglés fue hecho con una escala de 1 pulgada a 1 milla. Escriba esta escala en forma de razón.

| | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>1 milla = 1760 × 3 × 12<br>= 63 360 pulgadas<br>La razón utilizada en el mapa es 1:63 360. | *Siempre hay que asegurarse de que las unidades usadas en las razones sean las mismas.* |

> 12 pulgadas = 1 pie
> 3 pies = 1 yarda
> 1760 yardas = 1 milla

### Ejemplo 14

Tres niños, cuyas edades son 8, 12 y 15, ganan un premio de USD140. Deciden compartir el dinero del premio según la razón de sus edades. ¿Cuánto recibe cada uno?

| | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>USD140 se divide según la razón 8:12:15.<br>Esto es un total de<br>8 + 12 + 15 = 35 partes.<br>140 ÷ 35 = 4 dólares<br>8 × 4 = 32, 12 × 4 = 48 y<br>15 × 4 = 60<br>Los niños reciben USD32, USD48 y USD60. | *Dividir el dinero en 35 partes*<br>*Una parte es USD4.* |

## *Ejercitación 1F*

Leonardo Da Vinci dibujó el famoso *Hombre de Vitruvio* alrededor de 1487. El dibujo está basado en las proporciones humanas ideales descritas por el arquitecto de la antigua Roma, Vitruvio.

**1** La relación de aspecto (o razón de aspecto) es la razón del ancho de una imagen a su altura. Una fotografía mide 17,5 cm de ancho y 14 cm de altura. ¿Cuál es la relación de aspecto, reducida a su expresión mínima?

**2** La razón de sexo se expresa como la razón de hombres a mujeres, en la forma $n$:100. Según los datos, en el año 2008, la razón de sexo del mundo era 102:100. En el mismo año, en Japón, había 62 millones de hombres y 65,2 millones de mujeres. ¿Cuál era entonces la razón de sexo en Japón?

**3** Raquel faltó al colegio un total de 21 días durante un año escolar de 32 semanas. ¿Cuál es la razón del número de días que faltó al número de días que pudo haber asistido al colegio, reducida a su mínima expresión? (Una semana escolar tiene cinco días.)

**4** Un modelo de un avión tiene una envergadura de 15,6 cm. El modelo se construye con una escala de 1:72. ¿Cuál es la envergadura, en metros, de un avión en tamaño real?

**5** En un mapa, una ruta mide 1,5 cm. La ruta real mide 3 km. ¿Cuál es la escala del mapa? ¿Cuál sería, en el mapa, la longitud de un camino de 800 m?

**6** Se realiza una recaudación conjunta para dos organizaciones de beneficencia, una para animales y otra para niños enfermos, y se acuerda que las ganancias deben ser divididas según la razón 5:3. Se recaudan USD72. ¿Cuánto dinero se dona a cada una de las dos organizaciones?

**7** Para una feria de tortas, un grupo de alumnos decide hacer *brownies*, galletas de chocolate y galletas de avena, según la razón 5:3:2. Planean hacer 150 unidades en total. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben hacer?

## 1.6 El método de reducción a la unidad

En el método de reducción a la unidad, se comienza por hallar el valor de **una** parte o un elemento.

### Ejemplo 15

Una carretilla está llena de concreto, que se forma mezclando 6 palas de grava, 4 palas de arena, 2 palas de cemento y el agua necesaria. Cuando quedan solamente 3 palas de arena, ¿cuánto de cada uno de los demás ingredientes hará falta para formar el concreto?

▶ Continúa en la página siguiente.

**Respuesta**

La razón grava:arena:cemento

Es 6:4:2

O bien $\frac{6}{4}:\frac{4}{4}:\frac{2}{4}$

$=\frac{3}{2}:1:\frac{1}{2}=\frac{9}{2}:3:\frac{3}{2}$

Por lo tanto, la mezcla requiere $4\frac{1}{2}$ palas de grava, 3 palas de arena y $1\frac{1}{2}$ palas de cemento.

Dado que el valor que necesitamos cambiar es el de la arena, hay que dividir por 4 para convertir dicho valor en 1. Luego, multiplicar todos los valores por 3, para que la cantidad de arena sea igual a 3.

### Ejercitación 1G

1 Nicolás, Julián y Rosana invirtieron USD5000, USD7000 y USD4000 para poner en marcha una compañía. Durante el primer año, tienen una ganancia de USD24 000, que comparten según la razón del dinero que invirtieron. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

2 Claudia está haciendo una prueba de Matemáticas. Se da cuenta de que hay 3 preguntas que valen 12, 18 y 20 puntos. La prueba dura 1 hora con 15 minutos. Decide dividir el tiempo entre las tres preguntas según la razón que forman los puntos asignados. ¿Cuánto tiempo utiliza en cada pregunta?

# 2 Álgebra

La palabra **álgebra** proviene del título del libro *Hisab al-jabr w'al-muqabala* escrito por Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, en Bagdad, alrededor del año 800. Se considera que este fue el primer libro escrito sobre álgebra.

## 2.1 Desarrollo de paréntesis y factorización

La **propiedad distributiva** se usa para desarrollar expresiones con paréntesis y para factorizar expresiones.

$a(b + c) = ab + ac$

Otras dos propiedades que se utilizan en álgebra son la **propiedad conmutativa** $ab = ba$ y la **propiedad asociativa** $(ab)c = a(bc)$.

### Ejemplo 16

Desarrolle $2y(3x + 5y - z)$.

**Respuesta**

$2y(3x + 5y - z) = 2y(3x) + 2y(5y) + 2y(-z)$

$= 6xy + 10y^2 - 2yz$

## Ejemplo 17

Factorice $6x^2y - 9xy + 12xz^2$.

**Respuesta**

$6x^2y - 9xy + 12xz^2 = 3x(2xy - 3y + 4z^2)$

Busque un factor común y escríbalo fuera de los paréntesis. Halle los términos que quedan dentro de los paréntesis, dividiendo cada término por el factor común.

### *Ejercitación 2A*

**1** Desarrolle:

**a** $3x(x - 2)$ **b** $\frac{x}{y}(x^2y - y^2 + x)$ **c** $a(b - 2c) + b(2a + b)$

**2** Factorice:

**a** $3pq - 6p^2q^3r$ **b** $12ac^2 + 15bc - 3c^2$ **c** $2a^2bc + 3ab^2c - 5abc^2$

# 2.2 Fórmulas

## Transformación de fórmulas en otras equivalentes

## Ejemplo 18

La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde $A$ es el área y $r$ es el radio.
En esta fórmula la variable que está despejada es $A$.
Transforme la expresión en otra equivalente donde esté despejada $r$.

**Respuesta**

| | |
|---|---|
| $A = \pi r^2$ | |
| $r^2 = \frac{A}{\pi}$ | *Usar las mismas técnicas que para resolver ecuaciones. Lo que se haga en un miembro de la ecuación, se debe hacer en el otro.* *Dividir ambos miembros por* $\pi$ |
| $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ | *Aplicar la raíz cuadrada en ambos miembros* |

Se dice que la variable está despejada cuando está sola de un lado del signo =.

Se puede usar esta fórmula para calcular el radio de un círculo, cuando se conoce el área.

### *Ejercitación 2B*

Despeje la variable que se indica entre paréntesis:

**1** $v = u - gt$ $(t)$ **2** $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ $(c)$ **3** $c = 2\pi r$ $(r)$

**4** $\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b}$ $(b)$ **5** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $(\cos A)$

## Valor numérico de una expresión por sustitución

Siempre se puede usar la CPG en Estudios Matemáticos.

Cuando usamos fórmulas, la calculadora puede hacer los cálculos por nosotros. De todas maneras, siempre hay que mostrar el procedimiento.

1 Hallar la fórmula que se va a usar (del cuadernillo de fórmulas, de la pregunta o de la memoria) y escribirla.
2 Identificar los valores que se sustituirán en la fórmula.
3 Escribir la fórmula con las variables ya sustituidas por sus valores correspondientes.
4 Ingresar la fórmula en la calculadora. Usar plantillas para que la fórmula luzca igual en la CPG que como se ve en el papel.
5 Si fuera necesario, usar paréntesis. Siempre es mejor que haya paréntesis de más que de menos.
6 Escribir, con unidades si fuera necesario, el resultado que nos da la calculadora (con el grado de aproximación requerido).

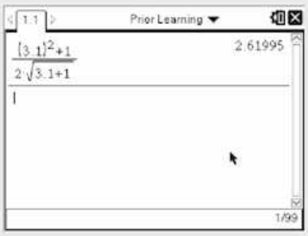
## Ejemplo 19

$x$ e $y$ están relacionadas por la fórmula $y = \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}$.
Halle el valor de $y$ cuando $x$ es 3,1.

**Respuesta**

$$y = \frac{3{,}1^2+1}{2\sqrt{3{,}1+1}}$$
$$= 2{,}62 \text{ (3 cs)}$$

*Escribir la fórmula sustituyendo x por 3,1*




## *Ejercitación 2C*

1 Si $a = 2{,}3$, $b = 4{,}1$ y $c = 1{,}7$, halle el valor de $d$, siendo
$$d = \frac{3a^2 + 2\sqrt{b}}{ac+b}.$$

2 Si $b = 8{,}2$, $c = 7{,}5$ y $A = 27°$, halle el valor de $a$, siendo
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}.$$

3 Si $u_1 = 10{,}2$, $r = 0{,}75$ y $n = 14$, halle el valor de $S$, siendo
$$S = u_1\frac{1-r^n}{1-r}.$$

## 2.3 Resolución de ecuaciones lineales

"Resolver una ecuación" significa "hallar el valor de la incógnita" (representada con una letra).

Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente, de manera que la incógnita, por ejemplo $x$, esté despejada. Al hacerlo, hay que mantener la ecuación "equilibrada", es decir siempre hay que hacer lo mismo en ambos miembros de la igualdad.

## Ejemplo 20

Resuelva la ecuación $3x + 5 = 17$.

**Respuesta**

| | |
|---|---|
| $3x + 5 = 17$ | |
| $3x + 5 - 5 = 17 - 5$ | *Restar 5* |
| $3x = 12$ | |
| $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$ | *Dividir por 3* |
| $x = 4$ | |

Sume, reste, multiplique o divida en ambos miembros de la ecuación, hasta que $x$ esté sola, en uno de los dos miembros (el derecho o el izquierdo).

## Ejemplo 21

Resuelva la ecuación $4(x - 5) = 8$.

**Respuesta**

| | |
|---|---|
| $4(x - 5) = 8$ | |
| $\frac{4(x-5)}{4} = \frac{8}{4}$ | *Dividir por 4* |
| $x - 5 = 2$ | |
| $x - 5 + 5 = 2 + 5$ | *Sumar 5* |
| $x = 7$ | |

Siempre hay que ser cuidadoso con el signo "–".

## Ejemplo 22

Resuelva la ecuación $7 - 3x = 1$.

**Respuesta**

| | |
|---|---|
| $7 - 3x = 1$ | |
| $7 - 3x - 7 = 1 - 7$ | *Restar 7* |
| $-3x = -6$ | |
| $\frac{-3x}{-3} = \frac{-6}{-3}$ | *Dividir por −3* |
| $x = 2$ | |

Un método alternativo para esta ecuación sería comenzar **sumando** $3x$. De esta forma, $x$ tendría un coeficiente positivo, pero en el miembro derecho de la ecuación.

## Ejemplo 23

Resuelva la ecuación $3(2 + 3x) = 5(4 - x)$.

**Respuesta**

| | |
|---|---|
| $3(2 + 3x) = 5(4 - x)$ | |
| $6 + 9x = 20 - 5x$ | |
| $6 + 9x + 5x = 20 - 5x + 5x$ | *Sumar 5x* |
| $6 + 14x = 20$ | |
| $6 + 14x - 6 = 20 - 6$ | *Restar 6* |
| $14x = 14$ | |
| $\frac{14x}{14} = \frac{14}{14}$ | *Dividir por 14* |
| $x = 1$ | |

Compare este método con el usado en el ejemplo 21. Algunas veces puede ser más directo comenzar **dividiendo**, en lugar de desarrollar los paréntesis.

### *Ejercitación 2D*

Resuelva estas ecuaciones:

**1** $3x - 10 = 2$

**2** $\frac{x}{2} + 5 = 7$

**3** $5x + 4 = -11$

**4** $3(x + 3) = 18$

**5** $4(2x - 5) = 20$

**6** $\frac{2}{5}(3x - 7) = 8$

**7** $21 - 6x = 9$

**8** $12 = 2 - 5x$

**9** $2(11 - 3x) = 4$

**10** $4(3 + x) = 3(9 - 2x)$

**11** $2(10 - 2x) = 4(3x + 1)$

**12** $\frac{5x+2}{3} = \frac{3x+10}{4}$

## 2.4 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

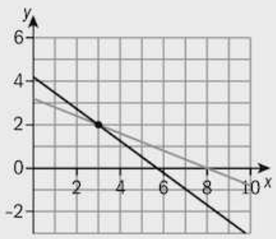
Hay dos métodos que se pueden usar para resolver **sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas**, llamados "de sustitución" y "de eliminación". Algunas veces también se pueden resolver gráficamente.

### Ejemplo 24

Resuelva el sistema de ecuaciones $3x + 4y = 17$ y $2x + 5y = 16$.

**Respuesta**

**Método gráfico**




*Desde el punto de vista geométrico, se puede considerar a estas dos ecuaciones lineales como las ecuaciones de dos rectas. Hallar la solución del sistema es equivalente a hallar el punto de intersección de ambas rectas. Las coordenadas del punto nos darán los valores de x y de y.*

La solución es $x = 3$, $y = 2$.

**Método de sustitución**

$3x + 4y = 17$

$2x + 5y = 16$

$5y = 16 - 2x$

$y = \frac{16}{5} - \frac{2}{5}x$

*Transformar una de las ecuaciones para despejar y*

$3x + 4\left(\frac{16}{5} - \frac{2}{5}x\right) = 17$

*Sustituir en la otra ecuación la expresión hallada para y*

$3x + \frac{64}{5} - \frac{8}{5}x = 17$

$15x + 64 - 8x = 85$

*Resolver la ecuación en x*

$15x - 8x = 85 - 64$

$7x = 21$

$x = 3$

▶ Continúa en la página siguiente.

| | |
|---|---|
| $3(3) + 4y = 17$<br>$9 + 4y = 17$<br>$4y = 8$<br>$y = 2$<br>La solución es $x = 3$, $y = 2$. | *Sustituir el valor hallado para x en una de las ecuaciones originales y hallar el valor de y* |
| **Método de eliminación**<br>$3x + 4y = 17$ (1)<br>$2x + 5y = 16$ (2) | |
| Multiplicar la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 3<br>$6x + 8y = 34$ (3)<br>$6x + 15y = 48$ (4) | *Esto se hace para que los coeficientes de x sean iguales.* |
| Restar las ecuaciones [(4) − (3)]<br>$7y = 14$<br>$y = 2$ | *Al restar se elimina a la variable x de la ecuación.* |
| $3x + 4(2) = 17$<br>$3x + 8 = 17$<br>$3x = 17 - 8$<br>$3x = 9$<br>$x = 3$<br>La solución es $x = 3$, $y = 2$. | *Sustituir el valor hallado para y en una de las ecuaciones originales y resolver en x* |

### *Ejercitación 2E*

**1** Resuelva estos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de sustitución:

**a** $y = 3x - 2$; $2x + 3y = 5$ **b** $4x - 3y = 10$; $2y + 5 = x$

**c** $2x + 5y = 14$; $3x + 4y = 7$

**2** Resuelva estos sistemas de ecuaciones lineales usando el método de eliminación:

**a** $2x - 3y = 15$; $2x + 5y = 7$ **b** $3x + y = 5$; $4x - y = 9$

**c** $x + 4y = 6$; $3x + 2y = -2$ **d** $3x + 2y = 8$; $2x + 3y = 7$

**e** $4x - 5y = 17$; $3x + 2y = 7$

## 2.5 Expresiones exponenciales

Una multiplicación en la que los factores son iguales se puede escribir como una expresión **exponencial**. Por ejemplo, el cuadrado de un número:

$3 \times 3 = 3^2$ o $5{,}42 \times 5{,}42 = 5{,}42^2$

Si se multiplica un número por sí mismo tres veces, entonces la expresión exponencial es un cubo. Por ejemplo:

$4{,}6 \times 4{,}6 \times 4{,}6 = 4{,}6^3$

Podemos además usar expresiones exponenciales cuando el exponente es un entero más grande. Por ejemplo:

$3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

Otro nombre posible para **exponente** es **índice**.

Usamos cuadrados en el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, o en la fórmula del área de un círculo, $A = \pi r^2$. Usamos un cubo en la fórmula del volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Cuando el exponente no es un entero positivo, se aplican las siguientes reglas:

$$a^0 = 1,\ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## Ejemplo 25

Escriba los valores de $10^2$, $10^3$, $10^1$, $10^0$, $10^{-2}$, $10^{-3}$.

**Respuesta**

$10^2 = 10 \times 10 = 100$

$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

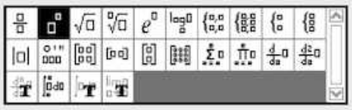
$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

*Para evaluar una expresión exponencial con la CPG, usar la tecla ^ o la tecla de plantillas y la plantilla de exponente*



## *Ejercitación 2F*

Realice los siguientes cálculos:

**1** **a** $2^3 + 3^2$ **b** $4^2 \times 3^2$ **c** $2^6$

**2** **a** $5^0$ **b** $3^{-2}$ **c** $2^{-4}$

**3** **a** $3{,}5^5$ **b** $0{,}495^{-2}$ **c** $2\frac{(1-0{,}02)^{10}}{1-0{,}02}$

# 2.6 Resolución de inecuaciones

Las inecuaciones se pueden resolver en una forma similar a la usada para resolver ecuaciones.

## Ejemplo 26

Resuelva las inecuaciones: **a** $2x + 5 < 7$ **b** $3(x - 2) \geq 4$

**Respuestas**

**a** $2x + 5 < 7$ **b** $3(x - 2) \geq 4$

$2x < 2$ $x - 2 \geq 1\frac{1}{3}$

$x < 1$ $x \geq 3\frac{1}{3}$

*Sumar, restar, multiplicar o dividir en ambos miembros de la inecuación, hasta que x esté sola en uno de los dos miembros*

Si se multiplica o divide una inecuación por un número negativo, se cambian los signos en ambos lados de la inecuación y se invierte el signo de la inecuación. Por ejemplo, $4 > 2$, pero $-4 < -2$.

Multiplicar o dividir por un número negativo cambia el sentido de la inecuación.

## Ejemplo 27

| Resuelva la inecuación $7 - 2x \le 5$. | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>$7 - 2x \le 5$<br>$-2x \le -2$<br>$x \ge 1$ | *Restar 7*<br>*Dividir por −2*<br>*Cambiar ≤ por ≥* |

## Ejemplo 28

| Resuelva la inecuación $19 - 2x > 3 + 6x$. | |
|---|---|
| **Respuesta**<br>$19 - 2x > 3 + 6x$<br>$19 > 3 + 8x$<br>$16 > 8x$<br>$2 > x$<br>$x < 2$ | *Invertir el sentido de la inecuación* |

Algunas veces la incógnita, $x$, termina en el lado derecho de la inecuación. En este caso se puede invertir la inecuación, como se muestra en el ejemplo.

## Ejercitación 2G

**1** Resuelva la inecuación y represente el conjunto solución en la recta numérica.

**a** $3x + 4 \le 13$ **b** $5(x - 5) > 15$ **c** $2x + 3 < x + 5$

**2** Resuelva en $x$:

**a** $2(x - 2) \ge 3(x - 3)$ **b** $4 < 2x + 7$ **c** $7 - 4x \le 11$

## Propiedades de las inecuaciones

➔ Cuando se suma o resta un número real en ambos miembros de una inecuación, el sentido de la inecuación no cambia.

Por ejemplo:

- $4 > 6 \Rightarrow 4 + 2 > 6 + 2$
- $15 \le 20 \Rightarrow 15 - 6 \le 20 - 6$
- $x - 7 \ge 8 \Rightarrow x - 7 + 7 \ge 8 + 7$
- $x + 5 < 12 \Rightarrow x + 5 - 5 < 12 - 5$

➔ Cuando se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un número real positivo, el sentido de la inecuación no cambia. Cuando se multiplican o dividen ambos miembros de una inecuación por un número real negativo, el sentido de la inecuación se invierte.

Por ejemplo:

- $4 < 5 \Rightarrow 2(4) < 2(5)$
- $6 \le 10 \Rightarrow -2(6) \ge -2(10)$
- $10 \le 30 \Rightarrow \frac{10}{5} \le \frac{30}{5}$
- $18 < 24 \Rightarrow \frac{18}{-3} > \frac{24}{-3}$
- $-12 > -20 \Rightarrow \frac{-12}{4} > \frac{-20}{4}$

## 2.7 Valor absoluto

El valor absoluto de un número (o módulo), $|x|$, es la parte numérica del número sin el signo. Puede ser definido como $|x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

### Ejemplo 29

Escriba $|a|$, donde $a = -4{,}5$ y $a = 2{,}6$.

**Respuesta**

Si $a = -4{,}5$, entonces $|a| = 4{,}5$.
Si $a = 2{,}6$, entonces $|a| = 2{,}6$.

### Ejemplo 30

Escriba el valor de $|p - q|$, donde $p = 3$ y $q = 6$.

**Respuesta**

$|p - q| = |3 - 6| = |-3| = 3$

### *Ejercitación 2H*

**1** Escriba el valor de $|a|$ cuando $a$ es:

**a** 3,25 **b** −6,18 **c** 0

**2** Escriba el valor de $|5 - x|$, cuando $x = 3$ y cuando $x = 8$.

**3** Si $x = 6$ e $y = 4$, escriba los valores de:

**a** $|x - y|$ **b** $|x - 2y|$ **c** $|y - x|$

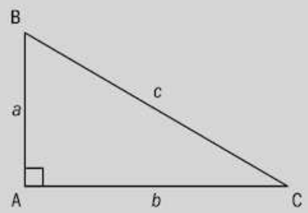
# 3 Geometría

*Los elementos* de Euclides, escrito alrededor del año 300 a. C., fue uno de los primeros libros de matemática y se mantuvo como libro de texto obligatorio hasta el siglo XX.
Euclides comenzó su primer libro definiendo algunos postulados (verdades evidentes), como ser:
*Un punto es lo que no tiene partes.*
*Un línea es una longitud sin anchura.*
*Una superficie plana es aquella superficie que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*
*Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.*

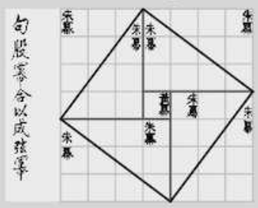
## 3.1 El teorema de Pitágoras

→ En un triángulo rectángulo ABC con lados $a$, $b$ y $c$, siendo $c$ la *hipotenusa*, se verifica:

$c^2 = a^2 + b^2$

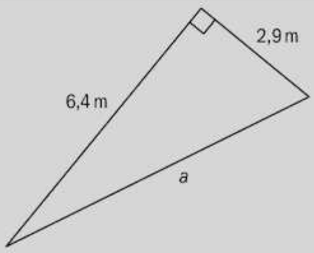



Aunque el teorema lleva el nombre del matemático griego Pitágoras, era conocido cientos de años antes en India, donde figura en los textos Sulba Sutras, y miles de años antes en China, como el teorema de Gougu.



## Ejemplo 31

Halle la longitud del lado rotulado $a$.




**Respuesta**

$a^2 = 6{,}4^2 + 2{,}9^2$

$a = \sqrt{6{,}4^2 + 2{,}9^2}$

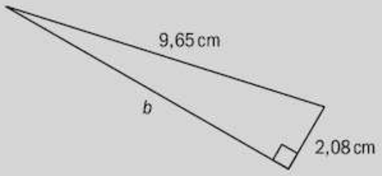
$a = 7{,}03$ cm (3 cs)

El teorema de Pitágoras se puede usar para calcular la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, si se conocen las longitudes de los otros dos lados.

En algunos casos es necesario hallar uno de los catetos.

## Ejemplo 32

Halle la longitud del lado rotulado $b$.




**Respuesta**

$9{,}65^2 = b^2 + 2{,}08^2$

$b^2 = 9{,}65^2 - 2{,}08^2$

$b = \sqrt{9{,}65^2 - 2{,}08^2}$

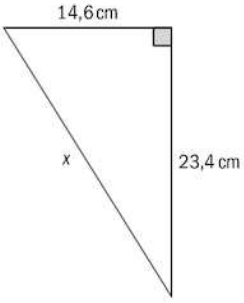
$b = 9{,}42$ cm (3 cs)

Verifique la respuesta, asegurándose de que la hipotenusa sea el lado más largo del triángulo.

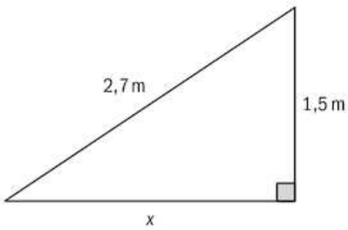
## *Ejercitación 3A*

En cada diagrama, halle la longitud del lado indicado con una $x$. Dé su respuesta redondeada a tres cifras significativas.

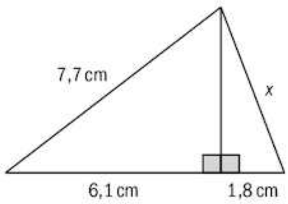
**1**



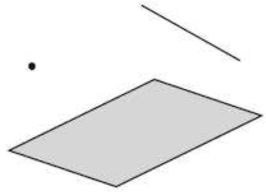

**2**




**3**



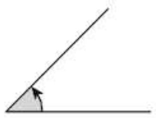
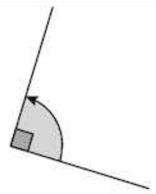
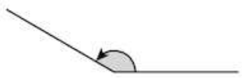
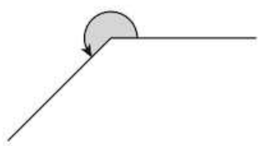
## 3.2 Puntos, rectas, planos y ángulos



Las ideas más básicas de la geometría son las de punto, recta y plano. Un **segmento** representa el camino más corto entre dos puntos. Los planos pueden ser **finitos**, como por ejemplo, la superficie de un escritorio o la de una pared, o **infinitos**, es decir, continuar en todas las direcciones.

Decimos que un punto tiene dimensión cero, una recta es unidimensional y un plano es bidimensional.

En Estudios Matemáticos medimos los ángulos en grados.

|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Ángulo agudo, entre 0° y 90° | Ángulo recto, 90° | Ángulo obtuso, entre 90° y 180° | Ángulo cóncavo, entre 180° y 360° |

### *Ejercitación 3B*

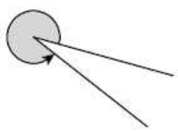
**1** Dibuje:

**a** Un ángulo cóncavo **b** Un ángulo agudo

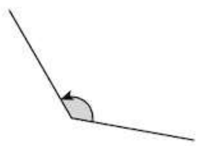
**c** Un ángulo recto **d** Un ángulo obtuso

**2** Indique si los siguientes ángulos son agudos, obtusos o cóncavos:

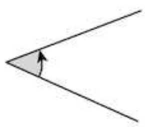
**a**



**b**



**c**



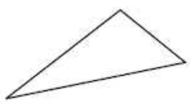
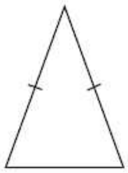
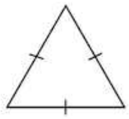
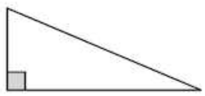
**3** Indique si los siguientes ángulos son agudos, obtusos o cóncavos:

**a** 173° **b** 44° **c** 272°

**d** 82° **e** 308° **f** 196°

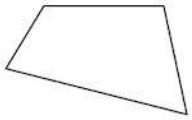
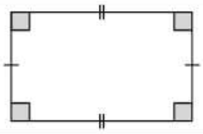
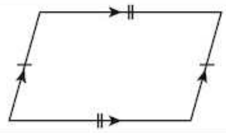
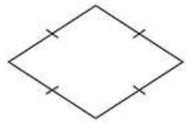
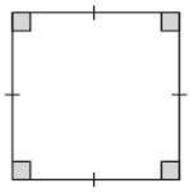
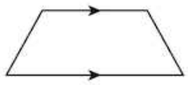
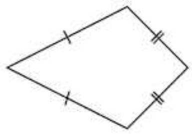
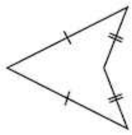
## 3.3 Figuras planas (bidimensionales)

### Triángulos

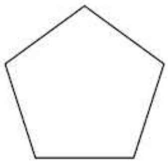
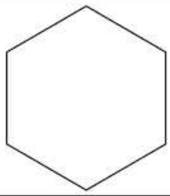
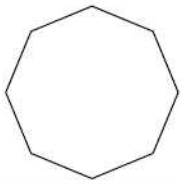
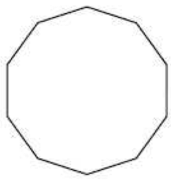
|  |  |  |  |
|---|---|---|---|
| Triángulo escaleno | Triángulo isósceles | Triángulo equilátero | Triángulo rectángulo |

Las líneas pequeñas en estos diagramas indican que los lados marcados son iguales y las flechas indican que los lados marcados son paralelos. Los cuadrados sombreados indican que el ángulo marcado es recto.

## Cuadriláteros

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| Irregular | Rectángulo | Paralelogramo | Rombo |
|  |  |  |  |
| Cuadrado | Trapecio | Cometa | Punta de flecha |

## Polígonos

| | | | |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| Pentágono | Hexágono | Octógono | Decágono |

### *Ejercitación 3C*

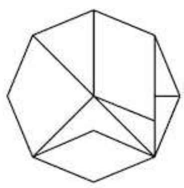
**1** Dibuje aproximadamente los cuadriláteros nombrados en la tabla anterior y agregue las diagonales. Copie y complete la siguiente tabla:

| Diagonales | Irregular | Rectángulo | Paralelogramo | Rombo | Cuadrado | Trapecio | Cometa |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Son perpendiculares. | | | | | ✓ | | |
| Son iguales. | | | | | ✓ | | |
| Se cortan en su punto medio. | | | | | ✓ | | |
| Dividen a los ángulos en dos partes iguales. | | | | | ✓ | | |

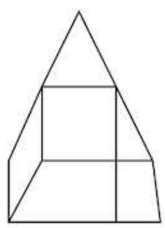
Por ejemplo, las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí, tienen la misma longitud (son iguales), se cortan mutuamente en partes iguales y dividen a los ángulos en partes iguales.

**2** Enumere los nombres de todas las figuras contenidas en cada uno de estos diagramas.

**a**

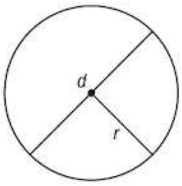


**b**



## 3.4 Perímetro

El **perímetro** de una figura se define como la longitud de su contorno.
El perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de sus lados.



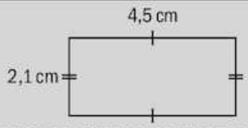

El contorno de un círculo se denomina **circunferencia**.

En el círculo que se muestra a la izquierda, $r$ es el radio y $d$ es el diámetro. Si $C$ es la longitud de la circunferencia, entonces:
$C = 2\pi r$ o $C = \pi d$

> $\pi$ = 3,141592653589793238462...
> Muchos matemáticos alrededor del mundo celebran el día de Pi el 14 de marzo. El uso del símbolo $\pi$ fue popularizado por el matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783).

### Ejemplo 33

Halle el perímetro de esta figura:




**Respuesta**
Perímetro = 4,5 cm + 2,1 cm + 4,5 cm + 2,1 cm = 13,2 cm

### Ejemplo 34

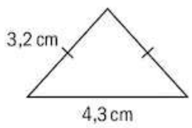
Halle el perímetro de esta figura:


**Respuesta**
Perímetro = 2 × 7,1 cm + 2,8 cm = 17,0 cm

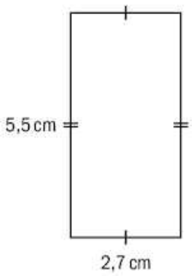
### *Ejercitación 3D*

Halle el perímetro de estas figuras:

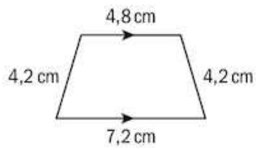
**a**



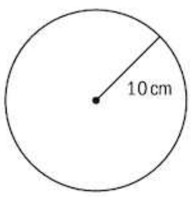

**b**



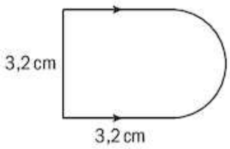

**c**



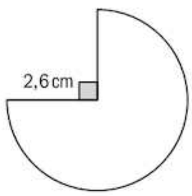

**d**




**e**

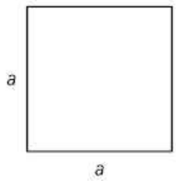
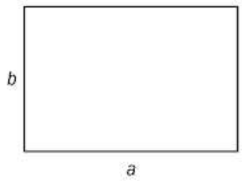
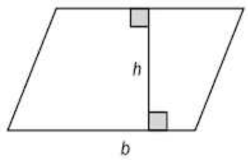
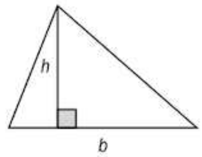
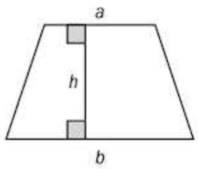
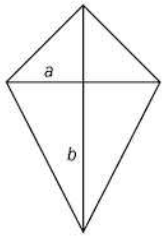
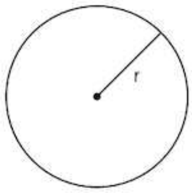



**f**



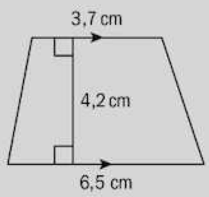
## 3.5 Área

En la siguiente tabla, se muestran algunas figuras planas junto con las fórmulas de sus áreas.

| | | | |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |
| $A = a^2$ | $A = ab$ | $A = bh$ | $A = \frac{1}{2}bh$ |
|   |   |   | |
| $A = \frac{1}{2}(a + b)\,h$ | $A = \frac{1}{2}ab$ | $A = \pi r^2$ | |

### Ejemplo 35

Halle el área de esta figura:

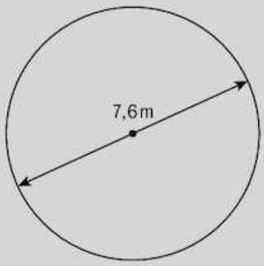



**Respuesta**

Área $= \frac{1}{2}(3{,}7 + 6{,}5)(4{,}2) = 21{,}42\text{ cm}^2$

### Ejemplo 36

Halle el área de esta figura y redondee su respuesta a tres cifras significativas.




Use la tecla $\pi$ de la calculadora para ingresar $\pi$.

**Respuesta**

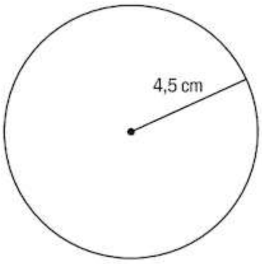
Área $= \pi(3{,}8)^2 = 45{,}4\text{ cm}^2$ (3 cs)

*Diámetro = 7,6 m, entonces radio = 7,6 ÷ 2 = 3,8 m*

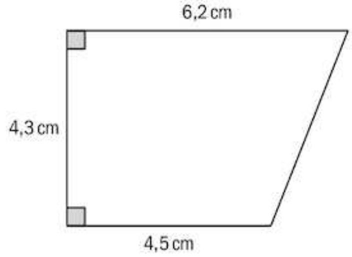
## *Ejercitación 3E*

Halle las áreas de estas figuras. Dé sus respuestas redondeadas a tres cifras significativas.

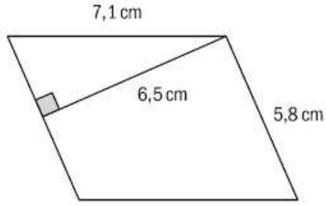
**1**



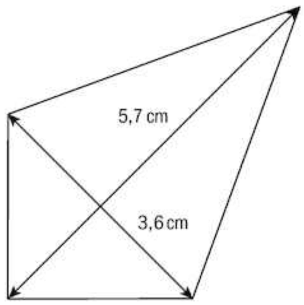

**2**



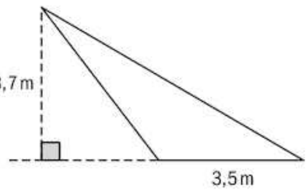

**3**



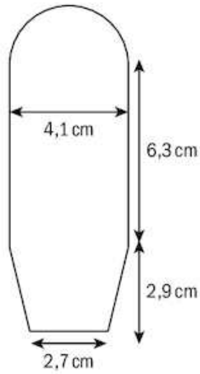

**4**




**5**



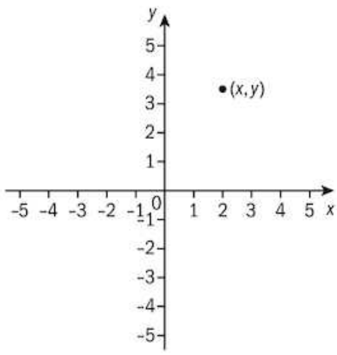

**6**




# 3.6 Geometría analítica

## Coordenadas

Las coordenadas de un punto describen su posición en el plano. La posición horizontal se muestra en el eje $x$ y la posición vertical se muestra en el eje $y$.

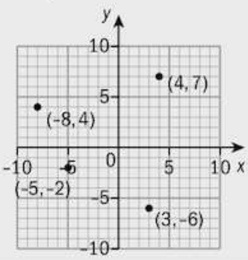



René Descartes introdujo el uso de coordenadas en un tratado en 1637. Es por esta razón que los ejes y las coordenadas también llevan el nombre de "ejes cartesianos" y "coordenadas cartesianas".

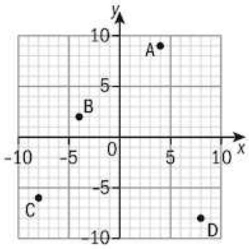
## Ejemplo 37

Dibuje un par de ejes donde $-10 \le x \le 10$ e $-10 \le y \le 10$.
Sitúe los puntos de coordenadas: (4, 7), (3, −6), (−5, −2) y (−8, 4).

**Respuesta**



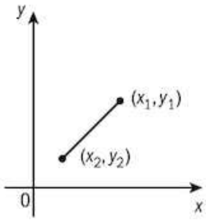
## *Ejercitación 3F*




**1** Dibuje un par de ejes donde $-8 \leq x \leq 8$ e $-5 \leq y \leq 10$.
Sitúe los puntos con coordenadas:
(5, 0), (2, −2), (−7, −4) y (−1, 9)

**2** Escriba las coordenadas de los puntos que se muestran en este diagrama.

## Punto medio




El punto medio del segmento que une los puntos de coordenadas $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

## Ejemplo 38

Halle el punto medio del segmento que une los puntos (1, 7) y (−3, 3).

**Respuesta**

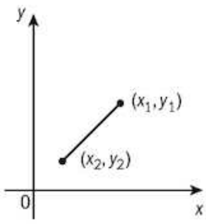
El punto medio es $= \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = (-1, 5)$.

## *Ejercitación 3G*

Calcule el punto medio de los segmentos que unen estos pares de puntos:

**1** (2, 7) y (8, 3) **2** (−6, 5) y (4, −7) **3** (−2, −1) y (5, 6)

## Distancia entre dos puntos




La distancia entre los puntos de coordenadas $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$ es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

## Ejemplo 39

Halle la distancia entre los puntos de coordenadas (2, −3) y (−5, 4).

**Respuesta**

Distancia $= \sqrt{(-5-2)^2 + (4-(-3))^2} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2} = 9{,}90$ (3 cs)

### *Ejercitación 3H*

Calcule la distancia entre los siguientes pares de puntos. Dé su respuesta redondeada a tres cifras significativas, cuando corresponda.

**1** $(1, 2)$ y $(4, 6)$

**2** $(-2, 5)$ y $(3, -3)$

**3** $(-6, -6)$ y $(1, 7)$

# 4 Estadística

## 4.1 Gráficos estadísticos

En una investigación estadística, recopilamos información, conocida como **datos**. Para representar los datos en forma clara podemos usar gráficos. Tres tipos de gráficos estadísticos son gráficos de barras, gráficos de sectores y pictogramas.

### Gráficos de barras

Un **gráfico de barras** está formado por rectángulos o barras del mismo ancho, cuyas longitudes son proporcionales a la cantidad que representan, o frecuencia. A veces dejamos un pequeño espacio entre las barras.

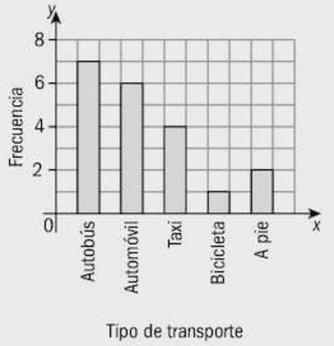
### Ejemplo 40

Juliana recopiló algunos datos sobre las formas en que sus compañeros de clase viajan al colegio.

| **Tipo de transporte** | Autobús | Automóvil | Taxi | Bicicleta | A pie |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 7 | 6 | 4 | 1 | 2 |

Represente esta información en un gráfico de barras.

**Respuesta**



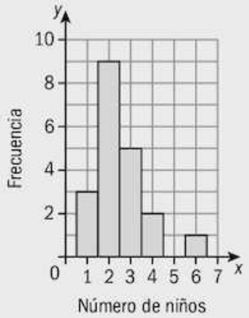
## Ejemplo 41

Lionel recopiló datos de la misma clase acerca del número de niños en cada una de sus familias.

| Número de niños | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| Frecuencia | 3 | 9 | 5 | 2 | 1 |

Represente esta información en un gráfico de barras.

**Respuesta**




## Gráfico de sectores

Un **gráfico de sectores** es un círculo dividido en sectores, como porciones de un pastel. El ángulo de cada sector es proporcional a la cantidad que representa.

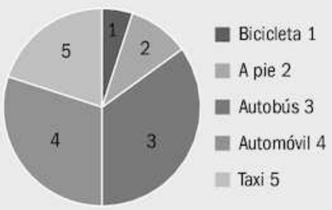
## Ejemplo 42

Utilice los datos de Juliana del ejemplo 40 para elaborar un gráfico de sectores.

**Respuesta**

| Tipo de transporte | Frecuencia | | Ángulo del sector |
|---|---|---|---|
| Autobús | 7 | $\frac{7}{20} \times 360°$ | 126° |
| Automóvil | 6 | $\frac{6}{20} \times 360°$ | 108° |
| Taxi | 4 | $\frac{4}{20} \times 360°$ | 72° |
| Bicicleta | 1 | $\frac{1}{20} \times 360°$ | 18° |
| A pie | 2 | $\frac{2}{20} \times 360°$ | 36° |

*La frecuencia total es 20. El ángulo total en el círculo completo es 360°.*




*Dibujar primero el radio y luego medir, con un transportador, un ángulo por vez. La suma de todos los ángulos debe ser 360°.*

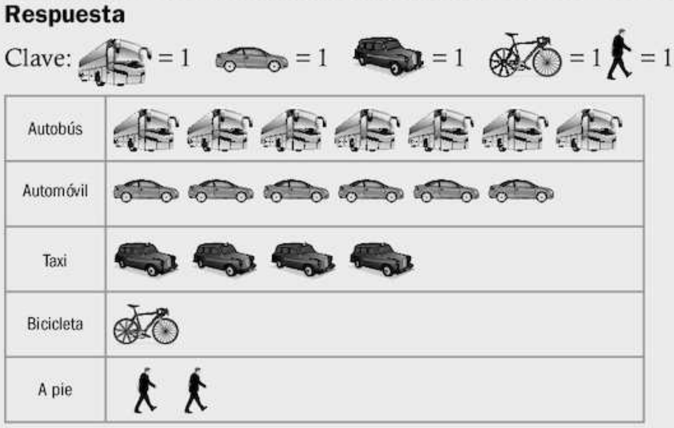
## Pictogramas

Los **pictogramas** son similares a los gráficos de barras, con la excepción de que en ellos se utilizan dibujos. La cantidad de dibujos es proporcional a la cantidad que representan. Los dibujos pueden estar relacionados con los elementos que representan o simplemente ser un símbolo, como por ejemplo, un asterisco.

## Ejemplo 43

Utilice los datos de Juliana del ejemplo 40 para elaborar un pictograma.

**Respuesta**




En este pictograma, se emplean símbolos diferentes para cada categoría y cada símbolo describe a su categoría.

## Ejemplo 44

Utilice estos datos sobre el número de niños de una muestra de familias para elaborar un pictograma.

| **Número de niños** | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 4 | 9 | 6 | 2 | 1 |

**Respuesta**

Número de niños

| | |
|---|---|
| 1 | △△△△ |
| 2 | △△△△△△△△△ |
| 3 | △△△△△△ |
| 4 | △△ |
| 6 | △ |

Clave: △ = 1

## *Ejercitación 4A*

**1** Desde su ventana, Adam llevó a cabo un sondeo sobre los automóviles que pasaban por el frente de su casa. Anotó el color de los automóviles durante 10 minutos y recopiló los siguientes datos:

| **Color** | Negro | Rojo | Azul | Verde | Plata | Blanco |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Frecuencia** | 12 | 6 | 10 | 7 | 14 | 11 |

Dibuje con precisión un gráfico de barras, un gráfico de sectores y un pictograma para representar estos datos.

**2** Ida les preguntó a sus compañeros cuántas veces habían ido al cine en el último mes. Recopiló los siguientes datos:

| **Número de veces que fueron** | 1 | 2 | 3 | 4 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de alumnos** | 4 | 7 | 4 | 3 | 1 | 1 |

Dibuje con precisión un gráfico de barras, un gráfico de sectores y un pictograma para representar estos datos.